

IUFM Antilles - Guyane

PLC 1 - Mathématiques

Algèbre - Géométrie

Problème :

Étant donné un ensemble E et une application f de E dans lui-même, on dira que n éléments ordonnés de E , notés a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$) forment un cycle pour f si a_2, \dots, a_n sont distincts de a_1 et si :

$$f(a_1) = a_2 \quad f(a_2) = a_3 \quad \dots \quad f(a_{n-1}) = a_n \quad f(a_n) = a_1$$

L'image de a_1 par f^h sera notée a_{h+1} pour tout entier positif h (ainsi $a_{h+n} = a_h$). Lorsque E est un espace vectoriel, un endomorphisme f de E sera dit cyclique d'ordre n s'il existe au moins un sous-ensemble de n vecteurs engendrant E et un ordre de rangement tel que ces vecteurs forment un cycle pour f .

De même, une transformation affine g d'un espace affine \mathbb{E} sera dite cyclique d'ordre n s'il existe au moins un sous-ensemble de n points engendrant \mathbb{E} et un ordre de rangement tel que ces points forment un cycle pour g .

Enfin, les espaces vectoriels qui interviennent sont des espaces vectoriels sur \mathbb{R} .

Première Partie :

E désigne un espace vectoriel de dimension 2 et f un endomorphisme de E cyclique d'ordre n .

1° Montrer que dans un cycle pour f :

- 2 vecteurs quelconques sont distincts
- 2 vecteurs consécutifs forment une base de E

2°) Établir les relations :

$$f^n = Id$$

$$f^m \neq Id \quad \text{quel que soit } m \text{ tel que } 0 < m < n.$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse construire un cycle pour f à partir d'un vecteur x non nul donné est que x ne soit pas un vecteur propre de f .

3°) Montrer qu'il existe des bases de E dans lesquelles f sera représenté par une matrice du type $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$

Établir que :

- * a vaut 1 ou -1.
- * a et b sont indépendants du choix d'une telle base,
- * $f^2 = a Id + b f$.

4°) $\mathbb{R}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à une indéterminée X , à coefficients réels. Montrer que l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(f) = 0$ est un idéal principal $I(f)$ de $\mathbb{R}[X]$.

Quel est son générateur ? En déduire que le polynôme $P(X) = X^2 - bX - a$ ne peut pas avoir de racine double.

5°) Montrer que $P(X)$ a ses racines réelles ssi $f^2 = Id$

6°) On suppose que $P(X)$ a ses racines non réelles.

Soit a_1, a_2, \dots, a_n un cycle pour f . Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique Φ unique telle que :

$$\Phi(a_1, a_1) = 1$$

$$\Phi(f(x), f(y)) = \Phi(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

Montrer que Φ définit une structure euclidienne sur E .

7°) Posons $\Phi(a_1, a_2) = \cos \theta$. Vérifier que cette définition est justifiée. Montrer que :

$$\begin{cases} \Phi(a_k, a_1) = \cos(k-1)\theta & \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \Phi(a_k, a_\ell) = \cos(k-\ell)\theta & \forall k, \ell \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

En déduire en fonction de θ la décomposition de a_R sur la base (a_1, a_2) en utilisant $\Phi(a_R, a_1)$ et $\Phi(a_R, a_2)$.

En déduire l'expression de f^h comme combinaison linéaire de f et de l'identité pour tout entier relatif h (on commencera par traiter le cas où h est positif).

En déduire que :
$$\begin{cases} n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ k\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \text{ si } 0 < k < n$$
 dès que f est cyclique d'ordre n .

Deuxième Partie :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 2, d'espace vectoriel associé E .
Soit g une transformation affine de \mathcal{E} cyclique d'ordre n .

1°/ Montrer que l'endomorphisme f de E associé à g est cyclique d'ordre $n \geq 3$.

2°/ a) Si f est un endomorphisme cyclique d'ordre $n \geq 3$, prouver que $f - I$ est inversible.

b) Si g est une application affine de partie linéaire f , montrer que si $f - Id$ est inversible, alors g admet un et un seul point fixe.

c) En déduire que toute transformation affine g de \mathcal{E} associée à un endomorphisme f cyclique d'ordre $n \geq 3$ de E est cyclique.

3°/ On se donne n et trois points A_1, A_2, A_3 . Montrer que si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés, il existe une transformation affine cyclique d'ordre n pour laquelle A_1, A_2, A_3 sont 3 points consécutifs d'un cycle.

4°/ Quelle relation doit-il y avoir entre les 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 pour qu'il existe une transformation affine cyclique d'ordre $n \geq 4$ pour laquelle A_1, A_2, A_3, A_4 soient 4 points consécutifs d'un cycle.

Troisième Partie :

E est maintenant un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme de E , cyclique d'ordre n .

1°/ Montrer que a) $f^n = \text{Id}$

b) 3 vecteurs consécutifs d'un cycle sont linéairement indépendants et que Id, f, f^2 sont linéairement indépendants.

2°/ Montrer que dans une base convenable f est représenté par une matrice M du type :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Montrer que a, b, c sont indépendants du choix d'une telle base.

Montrer que $f^3 - cf^2 - bf - a = 0$

3°/ En considérant l'idéal annulateur $I(f) = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(f) = 0\}$ de f , montrer que $P(X) = X^3 - cX^2 - bX - a$ divise $X^n - 1$. En déduire que f admet une valeur propre réelle unique et non multiple.

4°/ Lorsque f est direct (ie de déterminant positif), quelle est cette valeur propre réelle? Calculer a, b, c en fonction de l'argument θ d'une des valeurs propres non réelles de f .

Lorsque f est indirect (ie de déterminant négatif), quelle est la valeur propre réelle? Y-a-t-il une condition sur n ? Calculer de même a, b et c .

5°/ Soit a_1, \dots, a_n un cycle de f . Démontrer que si f est direct, les différences $a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1}, a_1 - a_n$ sont contenues dans le seul sous-espace vectoriel F de E de dimension 2 stable par f et qu'elles forment un cycle pour la restriction de f à ce sous-espace F .

6° Montrer qu'on peut munir E d'un produit scalaire rendant f orthogonal lorsque f est direct.

7° Soit g une transformation affine cyclique d'un espace affine \mathcal{E} associé à l'espace vectoriel E et soit β l'endomorphisme de E associé à g .

Montrer que :

- a) β est cyclique de même ordre que g ,
 - b) g admet un point fixe unique et β est indirect.
-

I.1.a Par un cycle d'ordre n , il existe donc un cycle pour f noté a_1, \dots, a_n tel que (a_1, \dots, a_n) engendre E .

Notons que $\forall h \in \mathbb{N}$ $f^h(a_i) = a_{i+h}$
 $\forall i \in [2, n]$ $a_i \neq a_1$

Si $a_i = a_j$ avec $\begin{cases} i, j \in \mathbb{N}_n \\ i < j \end{cases}$, on aura $f^{n+1-i}(a_i) = f^{n+1-j}(a_j)$

ce qui entraîne $a_1 = a_{j-i+1}$ où $1 \leq j-i+1 \leq n-1+1=n$

Par hypothèse : $1 = j-i+1 \Rightarrow i=j$.

I.1.b Comme E est de dimension 2, il suffit de montrer que 2 vecteurs consécutifs forment un système libre.

Par l'absurde : si a_i et a_{i+1} sont colinéaires, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a_{i+1} = \lambda a_i$ (puisque $a_i \neq 0$). En effet, $a_i = 0 \Rightarrow a_n = f(0) = 0$ et a_i, a_{i+1} sont distincts d'après I.1.a). Par récurrence, on aurait :

$$a_{i+h} = \lambda^h a_i \quad \forall h \text{ variant de } 1 \text{ à } n-1$$

et le système (a_1, \dots, a_n) serait lié. Absurde.

I.2

$\forall i \in \mathbb{N}_n$ $f^n(a_i) = a_{i+n} = a_i$

$f^n(a_i) = a_i$ pour tout vecteur du système générateur (a_1, \dots, a_n) de E , donc $f^n = \text{Id}$

* Si n vérifie $0 < m < n$ et $f^m = \text{Id}$, on aurait $f^m(a_1) = a_{m+1} = a_1$ avec $1 \leq m+1 \leq n$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

* On doit montrer que $\pi \neq 0$:

$(\pi, f(\pi), \dots, f^{n-1}(\pi))$ cycle pour $f \Leftrightarrow \pi$ n'est pas un vecteur propre de f .

(\Rightarrow) Si $(\pi, f(\pi), \dots, f^{n-1}(\pi))$ est un cycle pour f , $(\pi, f(\pi))$ est un système libre d'après I.1.b, donc π n'est pas un vecteur propre de f .

(\Leftarrow) Si x n'est pas un vecteur propre de β , le système $(x, \beta(x))$ est libre (car $x \neq 0$). Montrons que $(x, \beta(x), \dots, \beta^{n-1}(x))$ est un cycle pour β :

1) $(x, \beta(x))$ donc à fortiori $(x, \beta(x), \dots, \beta^{n-1}(x))$ engendre le plan E

2) $\beta(\beta^i(x)) = \beta^{i+1}(x)$

3) $\forall i \in [2, n-1] \quad \beta^i(x) \neq x$:

Sinon $\beta^i(x) = x$ et $\beta^i(\beta(x)) = \beta(\beta^i(x)) = \beta(x)$.

$(x, \beta(x))$ étant une base de E , on en déduit $\beta^i = \text{Id}$ avec $2 \leq i \leq n-1$, en contradiction avec $n = \inf \{d \in \mathbb{N}^* / \beta^d = \text{Id}\}$.

CQFD

I.3 Soit a_1, \dots, a_n un cycle pour β .

Notons $a_1 = x$ et $a_2 = \beta(x)$. (où $x \neq$ vect. propre de β)

$(x, \beta(x))$ est une base de E (I.1.5) et la matrice de β dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

* $\beta^n = \text{Id}$ entraîne $(\det A)^n = 1 \Leftrightarrow (-a)^n = 1 \Rightarrow a \in \{\pm 1\}$

* $a = -\det \beta$ et $b = \text{tr} \beta = \text{trace de } \beta$ sont entièrement déterminés par β .

* On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ab \\ b & a+b^2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

ie $\boxed{\beta^2 = a \text{Id} + b\beta}$

NB : On peut aussi calculer le polynôme caractéristique de A et appliquer le Th. de Cayley-Hamilton.

I.4

$I = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(\beta) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ car :

• C'est un sous-groupe :

$$0 \in I \text{ or } P, Q \in I \quad (P-Q)(\beta) = P(\beta) - Q(\beta) = 0 \text{ montre que } P-Q \in I.$$

$$\bullet \forall Q \in \mathbb{R}[X] \quad \forall P \in I \quad QP(\beta) = Q(\beta) \cdot P(\beta) = 0 \Rightarrow QP \in I$$

I est l'idéal annulateur de β . $\mathbb{R}[X]$ étant un anneau principal, I sera principal. On note $m_\beta(X)$ le polynôme unitaire qui engendre I . C'est le polynôme minimal de β .

$$\beta^2 - b\beta - a = 0 \text{ entraîne } m_\beta(X) \mid X^2 - bX - a \quad (*)$$

Si $\deg m_\beta = 1$, alors $m_\beta(X) = X - \lambda \Rightarrow \beta = \lambda \text{Id}$ ce qui est absurde car $(a, \beta(a))$ est libre. Donc $\deg m_\beta = 2$ et $(*)$ entraîne :

$$m_\beta(X) = X^2 - bX - a$$

$\beta^n = \text{Id}$ entraîne $m_\beta(X) \mid X^n - 1$ et montre que $X^n - 1$ ayant n racines simples dans \mathbb{C} , $m_\beta(X) = X^2 - bX - a$ n'aura que des racines simples dans \mathbb{C} .

NB: Ainsi $b^2 + 4a \neq 0$

I.5

Si $\beta^2 = \text{Id}$, $m_\beta(X) \mid X^2 - 1$ et m_β étant unitaire de degré 2, on aura

$$m_\beta(X) = X^2 - 1 = X^2 - bX - a \doteq P(X)$$

$P(X) = (X-1)(X+1)$ aura ses racines réelles

Réciproquement, si les racines de $P(X)$ sont réelles (et distinctes d'après I.4), $P(X) = m_\beta(X)$ divisant $X^n - 1$ qui possède au plus 2 racines réelles ± 1 ,

on aura :

$$P(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$$

$$\text{d'où } P(\beta) = 0 = \beta^2 - \text{Id}$$

$$\beta^2 = \text{Id}.$$

$$CQFD$$

I.6

* On cherche une forme bil. symétrique Φ telle que

$$\begin{cases} \Phi(a_1, a_1) = 1 \\ \Phi(\beta(x), \beta(y)) = \Phi(x, y) \quad \forall x, y \end{cases} \quad (*)$$

Soit $\Delta = b^2 + 4a < 0 \Rightarrow a = -1$ et $|b| < 2$

Travaillons dans la base $(a_1, a_2) = (a_1, \beta(a_1))$ du I.3.

Si $x = x_1 a_1 + x_2 a_2$

$y = y_1 a_1 + y_2 a_2$

$$\Phi(x, y) = x_1 y_1 \underbrace{\Phi(a_1, a_1)}_{=1} + x_2 y_2 \underbrace{\Phi(a_2, a_2)}_{=1} + \Phi(a_1, a_2)(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

* Déterminons $\Phi(a_1, a_2)$:

Comme $\beta(a_2) = a a_1 + b a_2$,

$$\Phi(a_1, a_2) = \Phi(\beta(a_1), \beta(a_2)) = \Phi(a_2, a a_1 + b a_2) = a \underbrace{\Phi(a_1, a_2)}_{=1} + b \underbrace{\Phi(a_2, a_2)}_{=1}$$

donc $\Phi(a_1, a_2) = \frac{b}{2}$

* Réciproquement, vérifions que la forme bil. sym. Φ dont la matrice dans la base (a_1, a_2) est

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie (*).

$$\Phi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \frac{b}{2} x_1 y_2 + \frac{b}{2} x_2 y_1$$

On a : $\begin{cases} \beta(x) = x_1 a_2 + x_2 \beta(a_2) = x_1 a_2 + x_2 (a a_1 + b a_2) = -x_2 a_1 + (x_1 + b x_2) a_2 \\ \beta(y) = -y_2 a_1 + (y_1 + b y_2) a_2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{donc } \Phi(\beta(x), \beta(y)) &= x_2 y_2 + (x_1 + b x_2)(y_1 + b y_2) + \frac{b}{2} (-x_2 (y_1 + b y_2) - y_2 (x_1 + b x_2)) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \frac{b}{2} x_1 y_2 + \frac{b}{2} x_2 y_1 \\ &= \Phi(x, y) \end{aligned}$$

et, bien sûr, $\Phi(a_1, a_1) = 1$.

Solution : Φ et $\Phi \circ \beta \circ \beta$ coïncident car elles coïncident sur la base (a_1, a_2) . En effet :

$$\Phi(a_1, a_2) \doteq \Phi(\beta(a_1), \beta(a_2)) = \Phi(a_2, a_2) \text{ d'après l'aller (ou un calcul direct)}$$

$$\Phi(a_1, a_1) \doteq \Phi(\beta(a_1), \beta(a_1)) = \Phi(a_2, a_2) = 1 = \Phi(a_1, a_1)$$

$$\Phi(a_2, a_2) \doteq \Phi(\beta(a_2), \beta(a_2)) = \Phi(a a_1 + b a_2, a a_1 + b a_2) = \underbrace{a^2 \Phi(a_1, a_1)}_{=1} + \underbrace{2ab \Phi(a_1, a_2)}_{=b} + \underbrace{b^2 \Phi(a_2, a_2)}_{=1} = 1$$

* Φ est un produit scalaire

C'est une f.b.o. non dégénérée car $\begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{b^2}{4} \neq 0$ (car $|b| < 2$)

et positive car $\begin{vmatrix} 1-x & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - \frac{b^2}{4} = x^2 - 2x + 1 - \frac{b^2}{4}$

$\Delta' = 1 - (1 - \frac{b^2}{4}) = \frac{b^2}{4} > 0$ montre que les racines de ce polynôme, ie les invariants de Φ , sont $1 \pm \frac{|b|}{2}$, toutes les 2 positives car $|b| < 2$.

2^e solution : Le oignature de Φ est aussi accessible en écrivant $\Phi(x, x)$ comme somme de carrés par la méthode de Gauss.

Prenons $q(x) = \Phi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + b x_1 x_2$

$$q(x) = \left(x_1 + \frac{b x_2}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{b^2}{4}\right) x_2^2$$

> 1

$$\frac{1}{1 - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{b^2}{4}}$$

I.7 Nous sommes sous les hypothèses de I.6, donc $a = -1$ et $|b| < 2$.

On avait $\Phi(a_1, a_2) = \frac{b}{2}$, de sorte que $|\Phi(a_1, a_2)| < 1$.

Il existe donc $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\Phi(a_1, a_2) = \cos \theta$

* Montrons que $\Phi(a_k, a_1) = \cos(k-1)\theta$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

C'est vrai pour $k=1$: $\Phi(a_1, a_1) = 1 = \cos 0 \cdot \theta$

pour $k=2$: $\Phi(a_2, a_1) = \cos \theta$

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $k-1$, où $k \geq 2$ et cherchons $\Phi(a_k, a_1)$:

$$a_k = \beta^2(a_{k-2}) = (-Id + 2 \cos \theta \cdot \beta)(a_{k-2})$$

$$= -a_{k-2} + 2 \cos \theta \cdot a_{k-1}$$

$$\text{donc } \Phi(a_k, a_1) = -\Phi(a_{k-2}, a_1) + 2 \cos \theta \cdot \Phi(a_{k-1}, a_1)$$

$$= -\cos(k-3)\theta + 2 \cos \theta \cdot \cos(k-2)\theta = \cos(k-1)\theta \quad \text{oui!}$$

$$\frac{1}{2} (\cos(k-1)\theta + \cos(k-3)\theta)$$

$$* \forall k, l \in \mathbb{N} \quad \overline{\Phi}(a_k, a_l) = \cos(k-l)\theta \quad ?$$

On peut supposer $k \geq l$ quitte à écrire $\overline{\Phi}(a_k, a_l) = \overline{\Phi}(a_l, a_k)$

$$\overline{\Phi}(a_k, a_l) = \overline{\Phi}(\beta^{k-l}(a_1), \beta^{l-l}(a_1)) = \overline{\Phi}(\beta^{k-l}(a_1), a_1) = \overline{\Phi}(a_{k-l+1}, a_1) = \cos(k-l)\theta$$

$$* \text{ Posons } a_k = x a_1 + y a_2.$$

$$\begin{cases} \overline{\Phi}(a_k, a_1) = \cos(k-1)\theta \\ \overline{\Phi}(a_k, a_2) = \cos(k-2)\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \cos \theta = \cos(k-1)\theta \\ x \cos \theta + y = \cos(k-2)\theta \end{cases}$$

Le déterminant est $D = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \neq 0$ ($\cos \theta \in]0, \pi[$). Le système est de Cramer et admet la solution:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sin^2 \theta} \begin{vmatrix} \cos(k-1)\theta & \cos \theta \\ \cos(k-2)\theta & 1 \end{vmatrix} = \frac{\cos((k-2)\theta + \theta) - \cos \theta \cdot \cos(k-2)\theta}{\sin^2 \theta} \\ y = \frac{1}{\sin^2 \theta} \begin{vmatrix} 1 & \cos(k-1)\theta \\ \cos \theta & \cos(k-2)\theta \end{vmatrix} = \frac{\cos((k-1)\theta - \theta) - \cos \theta \cos(k-1)\theta}{\sin^2 \theta} \end{cases}$$

$$= \frac{-\sin \theta \cdot \sin(k-2)\theta}{\sin^2 \theta} = -\frac{\sin(k-2)\theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta \cdot \sin(k-1)\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin \theta}$$

Col:

$$a_k = -\frac{\sin(k-2)\theta}{\sin \theta} a_1 + \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin \theta} a_2$$

* Soit $h \in \mathbb{N}^*$. $\beta^2 = -\text{Id} + 2 \cos \theta \beta$ montre l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\beta^h = \alpha \text{Id} + \beta \beta$.

$$\begin{cases} \beta^h(a_1) = a_{h+1} = -\frac{\sin(h-1)\theta}{\sin \theta} a_1 + \frac{\sin h \theta}{\sin \theta} a_2 \\ \beta^h(a_1) = (\alpha \text{Id} + \beta \beta)(a_1) = \alpha a_1 + \beta a_2 \end{cases}$$

montrant que

$$\beta^h = \underbrace{-\frac{\sin(h-1)\theta}{\sin \theta} \text{Id}}_{\alpha_h} + \underbrace{\frac{\sin h \theta}{\sin \theta} \beta}_{\beta_h}$$

pour $h \in \mathbb{N}^*$

* Si $h \in \mathbb{Z}^*$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $h + nq = h' > 0$

(On peut, par ex., écrire la div. euclidienne de h par $-n$: $h = -nq + h'$ avec $0 \leq h' < n$), ce qui nous permet de nous ramener au cas où $h' > 0$:

$$\beta^{h'} = \beta^{nq+h} = \beta^h \Rightarrow \boxed{\beta^h = \alpha_{\frac{h}{n}}, \text{Id} + \beta_{\frac{h}{n}} \beta}$$

* Faisons $h=n$ dans l'expression de β^h :

$$\beta^n = \text{Id} = -\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} \text{Id} + \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \beta$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \sin(n-1)\theta = -\sin \theta \\ \sin n\theta = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nécessairement : } \sin(n\theta - \theta) = -\sin \theta$$

$$\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \cos \theta - \sin \theta \cos n\theta = -\sin \theta$$

$$\cos n\theta = 1 \quad (\text{car } \sin \theta \neq 0)$$

$$\boxed{n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}}$$

* Faisons $h=m$ où $0 < m < n$.

$$\beta^m = -\frac{\sin(m-1)\theta}{\sin \theta} \text{Id} + \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} \beta$$

Si $m\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, β^m serait égal à Id , ce qui est absurde d'après I.2.

Donc $m\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ dès que $0 < m < n$.

II.1 Soit A_1, \dots, A_n un cycle pour g .

$$\begin{cases} A_1, A_2, \dots, A_n \text{ engendrent } \mathbb{E} & (\text{donc } n \geq 3) \\ g(A_i) = A_{i+1} & \forall i \in \mathbb{N}^* \\ A_i \text{ distinct de } A_1 & \forall i \in [2, n] \end{cases}$$

g , affine, transformant la partie $\{A_1, \dots, A_n\}$ en elle-même, conservera l'isobarycentre O de A_1, \dots, A_n .

La partie linéaire β de g vérifiera donc $\beta(\vec{OA}_i) = \vec{OA}_{i+1}$. Posons $a_i = \vec{OA}_i$.

Gn'a $\begin{cases} a_1, \dots, a_n \text{ engendrent } \mathbb{E}^{(n)} \\ \beta(a_i) = a_{i+1} \\ a_i \text{ distinct de } a_1 \end{cases}$ montre que β est cyclique d'ordre $n \geq 3$.

(*) si a_1, \dots, a_n linéaires $\Rightarrow O, A_1, \dots, A_n$ alignés en contradiction avec "A cycle pour g ".

II.2

* Lemme: Si β est un endomorphisme cyclique d'ordre $n \geq 3$, alors $\beta - \text{Id}$ est inversible.

Par l'absurde. Si $\beta - \text{Id}$ n'était pas inversible, 1 serait valeur propre de β donc racine du polynôme caractéristique $\chi_\beta(X)$ de β .

On a vu au I.4 que $\chi_\beta(X)$, qui n'est autre que le polynôme minimal $m_\beta(X) = P(X)$ de β , n'a pas de racine double.

Étant de degré 2, admettant la racine réelle 1, $P(X)$ admettra une 2^e racine réelle qui ne peut être que -1 (car $P(X) \mid X^n - 1$ et $X^n - 1$ a au plus 2 racines réelles ± 1).

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(X) &= (X-1)(X+1) = X^2 - 1 \Rightarrow P(\beta) = \beta^2 - \text{Id} = 0 \\ &\Rightarrow \beta^2 = \text{Id} \text{ absurde car } n \geq 3 \quad (\text{II.1}) \end{aligned}$$

* g admet un pt fixe unique: On a vu (II.1) que l'isobarycentre o était invariant par g . Le s.o.e.a. $\text{Inv}g = \{M \mid g(M) = M\}$ passe par o et sa direction est $\text{Inv}\beta = \text{Ker}(\beta - \text{Id}) = \{o\}$ (car $\beta - \text{Id}$ inversible), donc $\text{Inv}g = \{o\}$.

* Réciproquement, soit $g \in \text{GA}(\mathbb{R})$ associée à l'end. cyclique β d'ordre $n \geq 3$.

On a vu que $\beta - \text{Id}$ est inversible. On en déduit que g possède un unique point fixe o .

(En effet, si $\Omega \in \mathbb{R}$ est fixé et $\Omega' = g(\Omega)$,

$$g(o) = o \Leftrightarrow \vec{o}'o = \beta(\vec{o}o) \Leftrightarrow (\beta - \text{Id})(\vec{o}o) = \vec{o}'o \quad (*)$$

$\beta - \text{Id}$ étant inversible, $\vec{o}'o$ étant fixé, il existe 1 et 1 seul pt o vérifiant (*).

Soit a_1, \dots, a_n un cycle pour β

A_1, \dots, A_n les points de \mathbb{R} définis par $\vec{o}A_i = a_i$ (où $g(o) = o$).

$$\text{Alors } \begin{cases} \vec{o}g(A_i) = \beta(\vec{o}A_i) = \vec{o}A_{i+1} \Rightarrow g(A_i) = A_{i+1} \quad \forall i \\ A_i \text{ distinct de } A_1 \\ A_1, \dots, A_n \text{ engendrent } \mathbb{R} \quad (\text{car } \vec{o}A_1, \dots, \vec{o}A_n \text{ engendrent } E) \quad (*) \end{cases}$$

ce g est cyclique.

(*) Encore: $\forall o \in E \setminus \{A_1, \dots, A_n\}$ A_1, \dots, A_n engendrent $\mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{o}A_1, \dots, \vec{o}A_n$ eng E

$\exists i, j \in \{1, \dots, n\} \mid A_i, A_j, A_k \text{ base affine} \Leftrightarrow \vec{o}A_i, \vec{o}A_j, \vec{o}A_k \text{ base de } E$

$\vec{o}A_i, \vec{o}A_j, \vec{o}A_k \text{ base de } E \Leftrightarrow \vec{o}A_i, \vec{o}A_j, \vec{o}A_k \text{ base de } E$ (transl. de vect. $\vec{o}A_i$)

[(*) En effet, le s.o.e.a. engendré par A_1, \dots, A_n contiendra l'isobarycentre o de A_1, \dots, A_n (ie l'unique pt fixe de g). Alors $\vec{o}A_1, \dots, \vec{o}A_n$ engendrent $E \Rightarrow o, A_1, \dots, A_n$ engendrent \mathbb{R} . est trivial.]

II.3

* A_1, A_2, A_3 non alignés. Soient $a_1 = \overrightarrow{A_1 A_2}$ et $a_2 = \overrightarrow{A_2 A_3}$. (a_1, a_2) est une base de E .
 g cyclique d'ordre n vérifie $g(A_1) = A_2$ et $g(A_2) = A_3$. Ici g vérifie $g(A_1) = A_2$ et si sa partie linéaire f est cyclique d'ordre n et telle que $f(a_1) = a_2$.
 (cf II.1 et II.2)

Tout revient donc à construire un endomorphisme f cyclique d'ordre n tel que $f(a_1) = a_2$.

* Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ k\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$ si $0 < k < n$

Soit f l'endomorphisme de matrice A dans la base (a_1, a_2) .

On a vu (I.7) que :

$$f^h = -\frac{\sin(h-1)\theta}{\sin\theta} \text{Id} + \frac{\sin h\theta}{\sin\theta} f \quad \text{si } h \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{D'où } \begin{cases} f^k \neq \text{Id} & \text{si } 0 < k < n \\ f^n = \text{Id} \end{cases}$$

$a_1, a_2 = f(a_1), a_3, \dots, a_n$ (où $f(a_i) = a_{i+1}$ si $i \geq 1$) est un cycle pour f car :

1) $a_k \neq a_1$ pour $k > 1$.

Cela provient de I.7 :

$$a_k = -\frac{\sin(k-2)\theta}{\sin\theta} \cdot a_1 + \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta} \cdot a_2$$

$$\text{d'où } a_k = a_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(k-2)\theta = -\sin\theta \\ \sin(k-1)\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\sin(k-1)\theta}_{=0} \cdot \cos\theta - \sin\theta \cos(k-1)\theta = -\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos(k-1)\theta = 1 \Rightarrow (k-1)\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ absurde.}$$

2) a_1, a_2, \dots, a_n engendrent E car (a_1, a_2) est une base de E .

II.4

* A_1, A_2, A_3, A_4 4 pts de \mathbb{Z}

• Si A_1, A_2, A_3 alignés, $f(\overrightarrow{A_1 A_2}) = \overrightarrow{A_2 A_3}$ montre que f admet 1 valeur propre réelle qui ne peut être que ± 1 (car $f^n = \text{Id}$), ce qui est absurde (car f cyclique d'ordre $n \geq 3$, et on aurait $f^2 = \text{Id}$, cf preuve du lemme du II.2)

• Supposons A_1, A_2, A_3 non alignés. Posons $a_1 = \overrightarrow{A_1 A_2}$ et $a_2 = \overrightarrow{A_2 A_3}$. (a_1, a_2) est une base.

Tout revient à trouver un endomorphisme cyclique f tel que

$$\begin{aligned} f(a_1) &= a_2 \\ f(a_2) &= \overrightarrow{A_3 A_4} \end{aligned} \quad \text{puis à poser } g(M) = A_2 + f(\overrightarrow{A_1 M})$$

* Si l'endomorphisme f existe, sa matrice A dans la base (a_1, a_2)

sera $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ (puisque f n'a pas de valeur propre réelle) d'après
car $f^2 = \text{Id}$ impossible, cf lemme du II.2

la partie I, θ vérifiant les conditions de I.7

Réciproquement, si $\overrightarrow{A_3 A_4} = -a_1 + 2\cos\theta a_2$ avec $\begin{cases} n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ k\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$ on peut

alors f de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ sera cyclique d'ordre n et

$a_1 = \overrightarrow{A_1 A_2}$, $a_2 = \overrightarrow{A_2 A_3}$, $a_3 = \overrightarrow{A_3 A_4}$, ..., a_n (où $f(a_i) = a_{i+1}$) sera

un cycle pour f (m. preuve qu'au II.3)

Cel : La CNS cherchée est

$$\begin{cases} A_1, A_2, A_3 \text{ alignés} \\ \text{et} \\ \overrightarrow{A_3 A_4} = -\overrightarrow{A_1 A_2} + 2\cos\theta \overrightarrow{A_2 A_3} \end{cases}$$

III.1 Soit a_1, \dots, a_n un cycle pour f .
 $\begin{cases} a_1, \dots, a_n \text{ engendrent } E \\ f(a_i) = a_{i+1} \\ a_i \neq a_1 \quad \forall i \in [2, n] \end{cases}$

* $\forall h \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n \quad f^h(a_i) = a_{i+h}$ donc $f^n(a_i) = a_{i+n} = a_i$

Comme a_1, \dots, a_n engendrent E , cela prouve bien que $f^n = \text{Id}$.

* Montrons que (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) est libre ($\forall i \in \mathbb{N}_n$) [E. III]

Si $\alpha a_i + \beta a_{i+1} + \gamma a_{i+2} = 0$, en appliquant f^{n-i+1} on se ramène à :

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0$$

Si $\gamma \neq 0$, $a_3 = f^2(a_1)$ s'exprime en fct de a_1, a_2 et on vérifie par récurrence

sur i que tout vecteur a_i ($i \geq 3$) appartient à $\text{Vect}(a_1, a_2)$:

$$\begin{aligned} \text{au rang } i \quad a_i &= f(a_{i-1}) = f(\lambda a_1 + \mu a_2) = \lambda f(a_1) + \mu f(a_2) \\ &= \lambda a_2 + \mu a_3 \in \text{Vect}(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Donc $\text{Vect}(a_1, \dots, a_n) = \text{Vect}(a_1, a_2)$ ce qui est contraire à l'hypothèse :

" a_1, \dots, a_n engendrent E de dimension 3".

Finalement $\gamma = 0$. On recommence le m^{ême} raisonnement avec β pour conclure $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

* Id, f, f^2 sera un système libre car :

$$\alpha \text{Id} + \beta f + \gamma f^2 = 0 \Rightarrow \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

le système a_1, a_2, a_3 étant libre.

III.2 La matrice de f dans la base (a_1, a_2, a_3) est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de f est :

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & a \\ 1 & -X & b \\ 0 & 1 & c-X \end{vmatrix} = -X^3 + cX^2 + bX + a$$

Étant indépendant de la base choisie pour le calculer, les coefficients a, b, c ne dépendront que de f .

NB: $c = \text{tr } f$ et $\det f = a$. De $\text{Id}^n = f$ on déduit $\det f = \pm 1$
d'où $a = \pm 1$.

* Le Th. de Cayley-Hamilton entraîne $\chi_f(f) = 0$ soit

$$f^3 - cf^2 - bf - a\text{Id} = 0.$$

III.3 $I(f) = (m)$ où m est le polynôme minimal de f .

$m \mid \chi_f$ donc $\deg m \leq 3$.

$\deg m = 1 \Rightarrow m(X) = X - \lambda \Rightarrow f = \lambda \text{Id}$ absurde.

$\deg m = 2 \Rightarrow m(X) = X^2 + \lambda X + \mu$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ donc $m(f) = f^2 + \lambda f + \mu \text{Id} = 0$
ce qui est absurde car Id, f, f^2 est libre (III.1)

Donc $\deg m = 3$, et $m \mid \chi_f$ entraîne $m = -\chi_f$.

χ_f divise donc $X^m - 1$. χ_f étant un polynôme à coefficients réels, si λ est une racine complexe non réelle de χ_f , $\bar{\lambda}$ sera aussi racine de χ_f .
Comme χ_f est de degré 3, on en déduit que χ_f possède au moins une racine réelle ± 1 (puisque racine m -ième de l'unité).
 $\chi_f \mid X^m - 1$ et toutes les racines de $X^m - 1$ sont simples : toutes les racines de χ_f seront donc simples.
Par suite, f possède 3 valeurs propres distinctes : une réelle ($+1$ ou -1) et 2 racines complexes conjuguées $e^{\pm i\theta}$ où $\theta = k \frac{2\pi}{m}$ $0 < k < m$.

III.4 On a vu que $\text{Id}^n = f^n \Rightarrow \det f = \pm 1$.

$$f \text{ direct} \Leftrightarrow \det f = 1 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{vmatrix} = \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

$$f \text{ indirecte} \Leftrightarrow \det f = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

* Si f est directe : $a = 1$

$\lambda = 1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ sont les racines de $\chi_f(X) = X^3 - cX^2 - bX - 1 = 0$

$$\text{donc } 1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = c \Rightarrow \boxed{c = 1 + 2\cos\theta}$$

$$1 \cdot e^{i\theta} + e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} + e^{-i\theta} \cdot 1 = -b \Rightarrow \boxed{b = -(1 + 2\cos\theta)}$$

* Si β est indirecte : $a = -1$ et $\lambda = -1$

$\lambda = -1$, $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ sont les racines de $X^3 - cX^2 - bX + 1$

$$\text{donc } \begin{cases} c = -1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = -1 + 2\cos\theta \\ b = -(-1 \cdot e^{i\theta} + e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} + e^{-i\theta} \cdot (-1)) = 1 - 2\cos\theta \end{cases}$$

La condition sur n est obtenue en notant que $\beta^n = \text{Id}$, donc $(\det \beta)^n = 1$ et $\det \beta = a = -1$, donc $(-1)^n = 1$.

Ainsi β est indirecte nécessite n pair.

III.5 Soit β directe : $a = 1$ et les valeurs propres de β sont $1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ avec $\theta = k \frac{2\pi}{n}$ $0 \leq k < n$.

* Il y a au plus un seul plan stable par β :

Si F est un plan stable par β , le polynôme caractéristique de $\beta|_F$ divise celui de β (il suffit d'écrire la matrice de β dans une base (e_1, e_2, e_3) où (e_2, e_3) est une base de F . On obtient $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{A} \end{pmatrix}$ où $A = \text{Mat}(\beta|_F; e_2, e_3)$, donc $\chi_\beta(X) = \det(M - XI) = (a - X) \cdot \det(A - XI) \Leftrightarrow \chi_{\beta|_F} | \chi_\beta$)

Les valeurs propres de $\beta|_F$ seront distinctes et à choisir dans $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.

$\chi_{\beta|_F} \in \mathbb{R}[X]$ montre que ces valeurs propres seront $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, ie non réelles.

Si F et G sont 2 plans ^{distincts} stables par β , la droite $F \cap G$ sera stable par β donc $\beta|_F$ admettra une valeur propre réelle ; c'est absurde d'après ce qui précède.

* Le sev $F \neq \text{Vect}(a_2 - a_1, \dots, a_n - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1})$ est stable par β car :

$$\forall i \quad \beta(a_{i+1} - a_i) = \beta(a_{i+1}) - \beta(a_i) = a_{i+2} - a_{i+1}$$

$(a_2 - a_1, a_3 - a_2)$ est libre car $\lambda(a_2 - a_1) + \mu(a_3 - a_2) = 0 \Rightarrow -\lambda a_1 + (\lambda - \mu)a_2 + \mu a_3 = 0$
 $\Rightarrow \lambda = \mu = 0$
 (a_1, a_2, a_3) étant une base.

81 Montrons que $(a_2 - a_1, a_3 - a_2)$ engendre F :

Par récurrence sur i , montrons :

$$\forall i \in [1, n] \quad a_{i+1} - a_i \in \text{Vect}(a_2 - a_1, a_3 - a_2)$$

C'est trivial si $i=1$ ou 2 . Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $i-1$ (avec $i-1 < n$). On a :

$$\begin{aligned} a_{i+1} - a_i &= \beta(a_i - a_{i-1}) = \beta(\alpha(a_2 - a_1) + \beta(a_3 - a_2)) \\ &= \alpha(a_3 - a_2) + \beta(a_4 - a_3) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

et tout revient à prouver que $a_4 - a_3 \in \text{Vect}(a_2 - a_1, a_3 - a_2)$.

$$a_4 = \beta^3(a_1) = (c\beta^2 + b\beta + a)(a_1) = ca_3 + ba_2 + aa_1$$

$$\text{Donc } a_4 - a_3 = (c-1)a_3 + ba_2 + aa_1 \text{ s'écrit } \alpha(a_2 - a_1) + \beta(a_3 - a_2)$$

$$\text{ssi } \begin{cases} \alpha = -a \\ \alpha - \beta = b \\ \beta = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -a \\ \beta = c-1 = -a-b \end{cases}$$

C'est possible ssi $c-1 = -a-b$, ce qui est le cas puisque III.4 montre

$$\text{que } \begin{cases} a=1 \\ b=-(1+2\cos\theta) \\ c=1+2\cos\theta \end{cases}$$

CQFD

* $(a_2 - a_1, \dots, a_{j+1} - a_j)$ est un cycle pour $\beta|_F$: Il reste seulement à prouver que $a_{i+1} - a_i$ est toujours distinct de $a_2 - a_1$.

Supposons, par l'absurde, que $a_{j+1} - a_j = a_2 - a_1$. Alors $\beta^{j-1}(a_2 - a_1) = a_2 - a_1$ entraînerait $\beta^{j-1}(a_3 - a_2) = \beta^{j-1}(\beta(a_2 - a_1)) = \beta(a_2 - a_1) = a_3 - a_2$ donc $\beta|_F^{j-1} = \text{Id}_F$. Les valeurs propres de $\beta|_F$ sont $e^{\pm i\theta}$ où $\theta = k \frac{2\pi}{n}$ avec $0 < k < n$. Elles vérifient donc $(e^{\pm i\theta})^{j-1} = 1$ où $0 < j-1 < n$.

Si $0 < j < n$, $\beta^j \neq \text{Id}$ (sinon $\beta^j(a_1) = a_{j+1} = a_1$ absurde) donc $(e^{\pm i\theta})^{j-1} \neq 1$ ce qui est absurde.

III.6

III.5 montre que $\beta|_F$ est cyclique d'ordre n . La partie I affirme l'existence d'un produit scalaire Φ_F sur F tel que $\Phi_F(a_2 - a_1, a_2 - a_1) = 1$ et $\Phi_F(\beta(x), \beta(y)) = \Phi_F(x, y) \quad \forall x, y \in F$.

Le seul propre $\mathbb{R}e_1$ associé à la valeur propre 1 de β n'est pas inclus dans le plan F . Donc $E = F \oplus \mathbb{R}e_1$.

Définissons la forme bilinéaire symétrique Φ par :

$$\begin{cases} \Phi(e_1, e_1) = 1 \\ \Phi(x, y) = 0 \quad \forall x \in F \quad \forall y \in \mathbb{R}e_1 \\ \Phi(x, y) = \Phi_F(x, y) \quad \text{si } x, y \in F \end{cases}$$

$$\text{On a : } \forall z \in E \quad z = x + \lambda e_1 \quad x \in F \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } \Phi(z, z') = \Phi(x + \lambda e_1, x' + \lambda' e_1) = \Phi(x, x') + \lambda \lambda'$$

$$\text{Clairement : } \begin{cases} \Phi(z, z) = \Phi_F(x, x) + \lambda^2 \geq 0 \\ \Phi(z, z) = 0 \Rightarrow z = 0 \\ \Phi(\beta(z), \beta(z')) = \Phi(z, z') \quad \text{pour tout } z, z' \in E \end{cases}$$

Φ sera un produit scalaire rendant β Φ -orthogonale.

III.7 a) Soit A_1, \dots, A_n un cycle pour β , l'isobarycentre O de A_1, \dots, A_n sera invariant par β . Si $a_i = \vec{OA}_i$, on aura :

$$\beta(a_i) = a_{i+1}$$

$$a_i \neq a_1 \quad i \in [2, n]$$

a_1, \dots, a_n engendrent E (car $\vec{A_1A_2}, \dots, \vec{A_1A_n}$ engendrent E par hypothèse

$$\text{et } \forall x \in E \quad \exists \alpha_i \quad x = \sum_{i=2}^n \alpha_i \vec{A_1A_i} = \sum_{i=2}^n \alpha_i \vec{OA_i} - \left(\sum_{i=2}^n \alpha_i \right) \vec{OA_1})$$

b) On a vu que $g(0) = 0$. Si $0'$ était un autre pt invariant par g , on aurait $g(\vec{00'}) = \vec{00'} \Leftrightarrow \vec{00'} \in \text{Ker}(g - \text{Id})$.
 Montrons que $\text{Ker}(g - \text{Id}) = \{0\}$.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \neq 0$ tel que $g(x) = x$, ie que g admet la valeur propre 1, ie que g est directe.

Mais g est une application \mathbb{E} -orthogonale pour le produit scalaire \mathbb{E} introduit au III.6. C'est donc une rotation d'axe $\mathbb{R}x$. Cela contredit que g soit cyclique car si $A_1 \in \mathbb{E}$ est donné, les points $A_1, A_2 = g(A_1), \dots, A_{n-1} = g^{n-1}(A_1)$ seront coplanaires et ne pourront en aucun cas engendrer l'espace affine \mathbb{E} .

$$\left. \begin{aligned} 0 &= g(x) - x = (g(x) - x) \cdot \mathbb{E} = (g(x) - x) \cdot \mathbb{E} \\ 0 &= g(x) - x = (g(x) - x) \cdot \mathbb{E} \\ 0 &= g(x) - x = (g(x) - x) \cdot \mathbb{E} \end{aligned} \right\} \text{ Clairement : } \mathbb{E}(g(x) - x) = 0$$

donc g est une rotation d'axe $\mathbb{R}x$.

A_1, \dots, A_n est une base de \mathbb{E} , pour g est une rotation d'axe $\mathbb{R}x$. (F. III)

donc g est une rotation d'axe $\mathbb{R}x$.

$$g(x) = x$$

$$g(x) = x$$

indiquent que g est une rotation d'axe $\mathbb{R}x$.

$$g(x) = x \quad \text{et} \quad g(y) = -y \quad \text{pour} \quad x, y \in \mathbb{E} \quad \text{et} \quad x \perp y$$